Victrola de La Transformada de Fourier

Introducción para Músicos

Juan I Reyes

juanig@Maginvent.ORG

artElab

Laboratorios de Artes Electrónicas

Análisis de Sonido

Análisis de sonido abarca todas las técnicas que ofrecen una descripción cuantitativa y cualitativa de las características de un sonido. *Por ejemplo:*

- Altura, Amplitud, Envolvente.
- Espectro de amplitudes y fase.
- Envolvente Espectral,
- Nivel armónico, Formantes, Nivel de Ruido.

Señal

- Señal se define como la representación (o descripción) de un sonido y sus características básicas.
- Una señal también puede ser un modelo del comportamiento acústico (espectral) de cualquier sonido dado.

Tipos de Señales

- Hay señales analógicas y señales digitales.
- Al multiplicar una señal analógica por un valor de voltaje, por ejemplo: $-1 \leq v_0 \leq 1$, o $|v_0| \leq 1$, se obtiene una señal eléctrica.
- Una señal digital se obtiene a partir del muestreo de una señal analógica.
- Existen tanto señales de audio, de vídeo y muchas otras como oscilaciones en las placas tectónicas de la tierra y fluctuaciones en los valores de los bonos en la bolsa.

Convertidores

- Los convertidores de análogo a digital *[CAD]* muestrean valores de voltaje en una señal análoga para obtener una señal digital.
- Un convertidor de digital a análogo *[DAC]* convierte valores de una señal discreta en diferencias de voltaje utilizando diferentes métodos de interpolación.

Tratamiento de Señal

Tratamiento de Señal *[DSP]*, es el estudio de transformaciones y cambios en una señal por medio de métodos matemáticos casi siempre desarrollados a partir de técnicas de análisis y síntesis como la Transformada de Fourier.

Teorema de Shannon

El teorema de Claude Shannon (padre de la Teoría de la Información) formula el proceso de muestreo de una señal continua. La frecuencia Nyquist definida por Harry Nyquist es la tasa de muestreo mínima para garantizar condiciones óptimas de fidelidad tanto en su representación digital como en su reconstrucción análoga.

El teorema de Shannon se define en los siguientes términos:

Teorema de Shannon

- Muestreo de señal es el proceso por el cuál una señal continua $s(n)$ función del tiempo o espacio se transforma en una sucesión numérica $s[n]$, que también es una función discreta del tiempo o espacio.
- La señal continua $s(n)$, debe estar delimitada por un ancho de banda.
- La frecuencia de muestreo f_s, debe ser mayor que doble del ancho de banda de $s(n)$

Teorema de Shannon

- Una señal delimitada por sus bandas extremas es básicamente restringida a la rapidez de sus cambios y a la cantidad de detalles almacenados en cada punto de cada intervalo discreto en su duración.
- El teorema del muestreo garantiza que muestras discretas sean la representación completa y fiel de una señal en la que el ancho de banda es menor que la mitad de la frecuencia de muestreo f_s, denominada como frecuencia crítica o frecuencia Nyquist.

Teorema de Shannon

- Los componentes de frecuencias que están por encima de la frecuencia Nyquist están sujetos a un fenómeno llamado “aliasing” que es poco deseable en la mayoría de aplicaciones. La severidad de este problema depende de la intensidad relativa componentes con este “aliasing”.

Análisis Espectral

- Análisis Espectral es un tipo de algoritmos que describen el contenido de frecuencias de un sonido.
- La *STFT* da un espectro corto en longitud de tiempo a una sucesión de análisis tomados dentro de un sonido periódico.
- La evolución de energía o amplitud de cada componente espectral pueden ser representados por medio de un sonograma.

La Transformada de Fourier

- Al considerar una señal analógica $S_(t)$, en donde t está expresado en segundos, el espectro de esta señal $s_(t)$ se define como:

$$S(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi\omega_0 t}\ , dt.,$$

donde ω_0 es el componente de frecuencias representado en Hz.

La Transformada de Fourier

- El resultado de $S(\omega_0)$ es un numero complejo y puede ser expresado en términos de su magnitud y fase:

$$S(\omega_0) = |s(\omega)|e^{j\theta\omega}$$

- $|s(\omega)|$, es la amplitud del espectro.
- $|e^{j\theta\omega}|$, es el ángulo de fase del espectro.

La Transformada Inversa de Fourier

La transformada inversa de Fourier da la señal $s(t)$, en términos de su espectro:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_0) e^{j2\pi\omega_0 t} \, , d\omega_0 .,$$

En esta expresión se ve más claro el significado de $S(\omega_0)$. La señal $s(t)$ es representada por una integral (o suma continua) con términos dependientes en cada frecuencia $e^{j2\pi\omega_0}$, que a la vez son valorizados (amplificados) por la cantidad $S(\omega_0)$.

Identidad de Euler

El término $e^{j2\pi\omega_0 t}$, se denomina un exponencial complejo y gracias a la identidad de Euler puede mostrarse en la siguiente forma:

$$e^{j2\pi\omega_0 t} = \cos(2\pi\omega_0 t) + j\sin(2\pi\omega_0 t)$$

Esto significa que al utilizarlo en la Transformada de Fourier, la señal se expresa como una suma de frecuencias (senos y cosenos) con diferentes amplitudes $|S(\omega_0)|$ y ángulos de fase θ_{ω_0}.

Transformadas de Fourier

- La Transformada de Fourier en términos del la identidad de Euler y en términos de Senos y Cosenos:

$$S(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)[\cos(2\pi\omega_0 t) + j\sin(2\pi\omega_0 t)]\,,dt.,$$

- La Transformada Inversa de Fourier en términos de Senos y Cosenos:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_0)[\cos(2\pi\omega_0 t) + j\sin(2\pi\omega_0 t)]\,,dt.,$$

Series de Fourier

Las series de Fourier se definen como:

$$f_{per}(\omega_0 t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos(2\pi m \omega_0 t) + c_m \sin(2\pi m \omega_0 t)$$

- donde, a_0 es D.C. o el componente de amplitud promedio en la señal y
- los coeficientes b_m y c_m, representan en las magnitudes de los componentes Seno y Coseno para cada frecuencia $\omega_0 t$.

Transformada Discreta de Fourier:

Partiendo de las series de Fourier la *[DFT,]* produce el espectro de un sonido con duración finita. El dominio de la *[DFT,]* consiste en la sucesión de muestras $s(m)$, y se define como:

$$S(k) = \sum_{m=0}^{M-1} s(m)e^{-j\frac{2\pi}{M}km}, k = 0, ..., (M-1).,$$

donde M es el numero de muestras en la sucesión de entrada.

Espectro con la *[DFT]*

El espectro con la *[DFT]* $S(k)$ es un número complejo y puede ser convertido a un espectro de amplitud discreta $|S(k)|$ y a un espectro de fases discretas $\theta(k)$.

Espectro con la *[DFT]*

La amplitud $|S(k)|$ y la fase $\theta(k)$, son la amplitud y la fase de un exponencial complejo así:

$$e^{j2\pi\frac{k}{m}} = \cos(2\pi\frac{k}{m}) + j\sin(2\pi\frac{k}{m}),$$

donde la frecuencia es,

$$k\frac{f_s}{M}Hz.$$

f_s, es la frecuencia de muestreo.

Frecuencia Angular

Si definimos la frecuencia angular ω_k como:

$$\omega_k \triangleq \frac{2\pi k}{N}$$

La frecuencia del K-ésimo contenedor (bin) será la siguiente:

$$Y(k) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\omega_k n}, k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

IDFT con Frecuencia Angular

La *IDFT* se define como:

$$y(n) \triangleq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} Y(k)e^{j\omega_k n}, k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Nótese el cambio de símbolo en el exponencial complejo.
$y(n) \leftrightarrow Y(k)$ conforman un par de transformadas

donde k es el índice de las frecuencias y n es el índice en el tiempo.

Aplicaciones de la DFT

- Vocoder de Fase (Phase Vocoder)
- Modelos Espectrales
- Predicción Lineal de Parciales (LPC)
- Convolución de Espectros
- Filtros

Conclusiones

- La Transformada de Fourier se utiliza para análisis y síntesis de sonido entre otras varias aplicaciones.
- Señal es una representación de un fenómeno acústico, visual, etc.
- Al multiplicar una señal por un voltaje dado hay una señal eléctrica.

Conclusiones

- Hay señales discretas y continuas (digitales y análogas).
- El timbre de un sonido o su espectro se define como una suma de senos y cosenos (sinuosidales).